NOM : ____________________

MAT-17593 **Examen du 12 décembre 2007** **FG**

Il y a 5 questions pour un total de 100 points: la note sera multipliée par 1.1 pour donner 10 points bonis. **Signer et remettre le questionnaire.**
Vous pouvez reproduire de manière approximative les figures dans votre cahier d'examen.

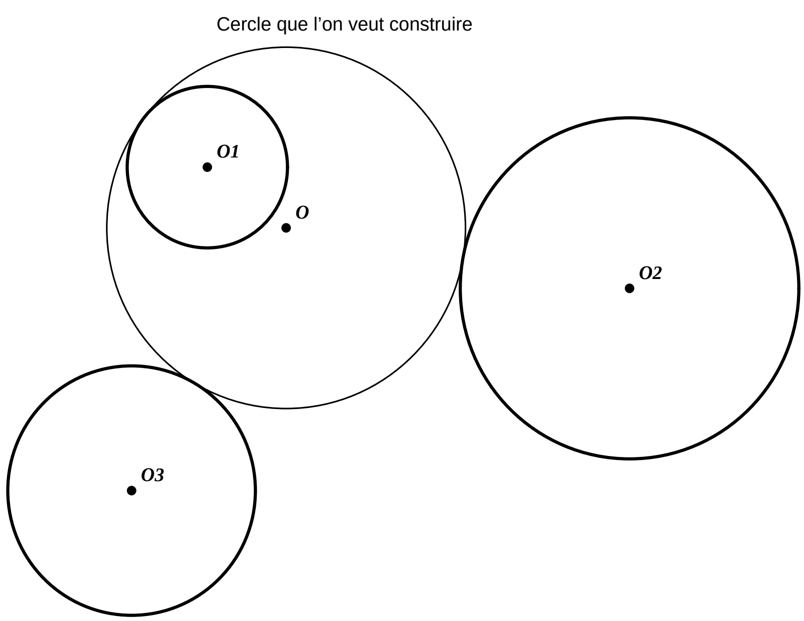
1. (**20 points**) *Question de théorie* **Répondre à Choix A ou Choix B**

- **Choix A** On veut résoudre le problème de construction d'un cercle tangent à trois cercles donnés dans le cas précis suivant : on a les trois cercles $C1$, $C2$ et $C3$ de centres $O1$, $O2$ et $O3$ et on cherche à construire le cercle de centre O (que l'on dénotera par W).

  On peut résoudre ce problème en le ramenant à la construction d'un cercle $W2$ qui est tangent à deux cercles Γ_1 et Γ_2 et qui passe par un point P.

  i- Donner ces deux cercles Γ_1 et Γ_2 (i.e. centre et rayon de chacun) et ce point P, et tracer *approximativement* le cercle $W2$ que l'on obtiendra alors. (*On ne vous demande pas de construction exacte règle et compas.)*

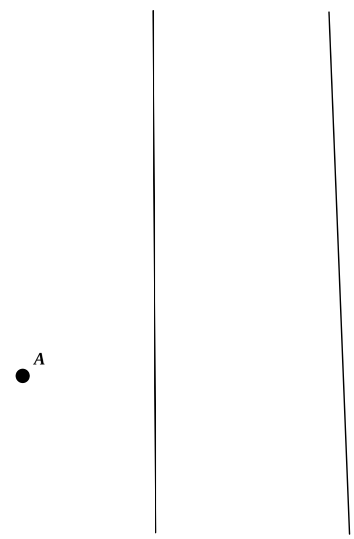
  ii- Expliquer précisément et brièvement comment on obtient le cercle cherché W à partir de $W2$.



- **Choix B** Énoncer le Théorème de Ceva et prouver l'implication dans le sens *"Si les droites sont concourantes, alors"*.

2. (**15 points**) **En utilisant uniquement une règle non-graduée**, construire une droite par le point A qui passe par le point d'intersection des deux droites tracées (qui ne sont pas parallèles). Évidemment, on ne prolonge pas les droites pour trouver le point d'intersection.

   Décrire clairement votre construction, que vous n'avez pas à justifier.



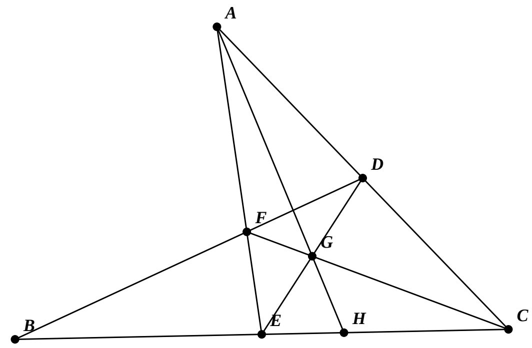
3. (**15 points**) Deux cercles W_1 (de centre O_1 et de rayon r_1) et W_2 (de centre O_2 et de rayon r_2 se coupent en deux points R et S. À partir d'un point P quelconque sur la droite RS, on trace une sécante au cercle W_1 qui le coupe en A et B, et une sécante au cercle W_2 qui le coupe en C et D. *Pour votre dessin, vous pouvez supposer que P n'est pas entre R et S.*

   Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est inscriptible.

4. (**25 points**) Soit la figure ci-dessous dans laquelle le point E est le milieu de BC et le point D est le milieu de AC.

   (a) (10 points) Montrer que $HE = \frac{HC}{2}$.

   (b) (15 points) En utilisant la première partie au besoin, montrer que EF est le tiers de EA.



5. (**25 points**) Soit AB un diamètre du cercle W. Soit d perpendiculaire à la droite AB au point I.

   Soit M un point variable du cercle. On trace les droites AM et BM qui recoupent la droite d en P et Q respectivement. On trace QA qui coupe le cercle en N.

   On veut montrer que la droite MN passe par un point fixe.

   (a) (5 points) Montrer que N, B et P sont alignés. (Suggestion : considérer le point B dans le triangle $\triangle APQ$.)

   (b) (15 points) En prenant maintenant pour acquis que N, B et P sont alignés, montrer que $(IKBA) = -1$.

   (c) (5 points) Déduire de (ii) que lorsque M varie, les droites MN obtenues passent toutes par un même point.